A. M. D. G.

ANALYSEOS ELEMENTA

EXERCITATIONIS GRATIA

ANALYTICE DEMONSTRATA

In Collegio Romano S. I. à PP.
ejuſdem Societatis.

VITT. EM. BIBLIOTECA IN ROMA

Anno MDCCXX. Menſe Die Horâ

ROMÆ MDCCXX.

Ex Typographia Komarek in via Cursûs.
SUPERIORUM PERMISSU.

Digitized by Google

Digitized by Google

Nonnullę demonſtrantur propoſitiones in Geometria, quę elementa Analyſeos dici poßunt, quia illis calculi leges atque inventio æquationum innituntur. Hæc Analyſeos elementa exercitationis gratiâ libet analyticè demonſtrare, ne alienâ vivere quadrâ videatur facultas, quæ & ſibi abundè ſufficit, & cęteras locupletat.

DEFINITIONES.

I. Quantitas analytica dicitur quidquid augmenti, & decrementi capax eſt.

II. Plures quantitates analyticæ vocantur ejuſdem generis, quando addi, & ſubtrahi poſſunt, ſeu conſiderari tanquam pars, & totum ſi omnes fuerint poſitivæ, aut tanquam excludens, & excluſum, ſi quædam fuerint poſitivæ, & quædam negativæ.

III. Ratio analytica appellatur duarum quantitatum ejuſdem generis relatio ſecundum certum numerum partium æqualium, in quas reſolvitur quantitas antecedens, & quarum certum numerum quantitas conſequens continet, vel excludit. Verbi gratia duarum quantitatum ejuſdem generis a, & b ea relatio antecedentis a ad conſequentem b per quam reſolutâ a in partes æquales, quarum ſingulæ denominentur x, & omnium numerus m; earundem partium conſequens b certum numerum n continet,

Digitized by Google

vel excludit, ita ut exiſtente $a = mx$, $b = nx$ ſi ambæ fuerint poſitivæ, vel exiſtente $a = mx$, $b = -nx$ ſi altera fuerit negativa, & altera poſitiva ; hæc inquam relatio antecedentis ad conſequentem ſecundum continentiam , vel excluſionem partium æqualium in utroque termino certis numeris quicunque illi ſint limitatam ratio analytica appellatur. Ut hæc definitio ad quantitates incommenſarabiles extendatur ſatis eſt ponere incommenſurabiles numeros m , & n ; vel ponere variabilem x minorem qualibet quantitate determinatè aſſignabili , nam reſiduum incommenſurationis in multitudine majori qualibet determinatè aſſignabili , utpote unicum erit comparativè nullum. Rurſus quoniam ratio excluſionis a ad $-b$ major eſt qualibet determinatè aſſignabili ratione continentiæ a ad b , eadem definitio extenditur ad rationes infinitas. Neque obſtant celebres apud Phyloſophos controverſiæ de infinito , & continuo. Quippe ſi queſtio fiat quæ ſit in continuo partium æqualium moles , & quis earundem numerus ? denominando datum continuum c ; quæſitam molem unius ex partibus x , quæſitum earundem numerum y , ſenſus quæſtionis analyticè exprimitur unicâ æquatione involuente binas incognitas $c = yx$ per hyperbolam ad aſymptotos relatam conſtruenda , atque infinitas admittente ſolutiones.

IV. Proportio analytica eſt rationum æqualitas in eo conſiſtens , quod reſolutis antecedentibus rationum in eundem numerum partium æqualium , omnes rationum æqualium conſequentes dictarum partium eundem numerum contineant , vel excludant. Exempli gratia râtio a ad b per hoc dicitur æqualis rationi c ad d quod reſolutis antecedentibus a , & c in eundem numerum m partium æqualium , quarum quælibet conſtituens a denominetur x & quælibet conſtituens c denominetur y dictarum partium uterque conſequens b & d eundem numerum n contineat , vel excludat , ita ut exiſtentibus $a = mx$, $b = nx$, $c = my$, etiam $d = ny$, vel exiſtentibus $a = mx$, $c = my$, & $b = -nx$, etiam $d = -ny$.

V. Productum multiplicationis eſt quartus terminus proportionalis poſt unitatem , & duos terminos datos quo-

Digitized by Google

im alter dicitur multiplicandus, & alter multiplicator ita, : ratio unitatis ad multiplicandum ſit æqualis rationi multiplicatoris ad productum. Unde conſtat unitatem eſſe ejuſdem generis cum multiplicando, & multiplicatorem cum producto multiplicationis.

AXIOMATA.

I. Rationes eidem rationi, vel æqualibus rationibus quales inter ſunt æquales; habent enim omnes continentiam, vel excluſionem partium in quas termini reſoluuntur iſdem numeris limitatam. Eadem de cauſa quantitates :quales ad eandem, & eadem ad æquales æqualem habent ationem, & quæ ad eandem æqualem habent rationem, vel d quas eadem æqualem rationem habet ſunt æquales.

II. Ex qualibet multiplicatione, vel diviſione utriuſque ermini rationis per eundem numerum ratio non mutatur. Quippe quæ continentia, vel excluſio partium æqualium datur inter antecedentem, & conſequentem, eadem intercedit inter decuplum antecedentis, & decuplum conſequentis, vel inter decimam antecedentis partem, & decimam partem conſequentis dummodo partium ſingularum moles decupletur, vel decimetur, & ſic de reliquis.

Propoſitiones ad calculi praxim pertinentes.

Calculus innititur modis arguendi ab Euclide in elemento 5. demonſtratis. Eoſdem Analyſis ſic demoſtrat. Primo ſit ratio $a : b = c : d$. Ergo per def. 4. reſolvendo terminos in partes æquales erit $mx : nx = my : ny$; ſed per axioma 2. $mx : my = x : y = nx : ny$, ergo per axioma 1. valet modus arguendi per alternationem Secundo erit per axioma 2. $nx : mx = n : m = ny : my$, ergo per axioma 1. valet modus arguendi per inverſionem. Tertio per ax 2. erit $mx + nx : nx = m + n : n = my + ny : ny$ ergo per ax. 1. valet modus arguendi per compoſitionem, & mutatis ſignis intermediis per diviſionem, nec difficilius oſtenditur tam compoſitio, & diviſio rationis contraria, quàm converſa. Quarto. Per ax. 2. erit

erit $x : mx = ny : mny = 1 : m$ ergo per definitionem 5. quantitas mny eſt productum ex multiplicatione extremorum; ſed etiam per ax. 2. erit $x : nx = my : mny = 1 : n$ ergo eadem quantitas mny eſt per definitionem 5. productum ex multiplicatione mediorum, adeoque ſi quatuor quantitates proportionales fuerint factum ſub extremis æquatur facto ſub mediis. Quinto ſi ratio $a : b = mx : nx$, & $c : d = my : zy$, adhuc erit per def. 5. mzy productum ex multiplicatione extremorum, & mny productum ex multiplicatione mediorum; ſed ſi $mzy = mny$ per ax. 2. erit $z = n$, ergo ſi quatuor termini ita ſe habeant, ut productum ex multiplicatione extremorum æquetur producto ex multiplicatione mediorum ſunt proportionales. Sexto ſi tres termini a, b, c, ſint in eadem ratione ordinata cum tribus aliis d, e, f, reſolvendo terminos in partes æquales ita ut ſit $a = mx$, $b = nx$, $c = lx$, $d = my$, $e = ny$ erit per def. 4. ſextus terminus $f = ly$; ſed per ax. 2. $mx : lx = m : l = my : ly$ ergo per ax. 1. valet modus arguendi ex æqualitate ordinata. Septimo ſi tres termini a, b, c, ſint in eadem ratione perturbata cum tribus aliis d, e, f quoniam ex hypotheſi $a : b = e : f$ poſitis $a = mx$, $b = nx$, & $e = my$ erit per def. 4. $f = ny$, & quoniam $b : c = d : e$ poſitis $d = nx$, $c = lx$, & $d = nz$ erit per def. 4. $e = lz$. ſed $1 : m = y : my$, & $1 : l = z : lz$, ergo cum $my = e = lz$ ex oſtenſis in propoſitione 5. erit $m : l = z : y = mx : lx = nz : ny$, nempe $a : c = d : f$, adeoque valet modus arguendi ex æqualitate perturbata. Octavo vt appareat quàm multa calculus paucis compræhendat, eſto ſeries terminorum decreſcentium in continua ratione a ad b, quorum numerus quocunque aſſignabili major; eritque poſita ſumma omnium antecedentium x, ſumma omnium conſequentium $x-a$, & componendo $a : b = x : x-a$, ſeu reductione facta $aa : a-b = x : 1$. Quod ſi termini æquales fuerint erit $a : a = x : x-a$, adeoque a comparativè nullus. Si demum termini creſcentes ponantur nullus terminorum poteſt eo uſque creſcere, ut evadat major qualibet quantitate determinatè aſſignabili, quin ſimul evadat comparativè nullus reſpectu ſummæ omnium præcedentium. Quare poſita omnium terminorum ſumma x, eadem quantitas æqualis erit ſummæ omnium antecedentium. Ergo redit

dit

Digitized by Google

it æquatio $a:b=x:x\text{-}a$, ſeu $aa:a\text{-}b=x:1$, & quia $a\text{-}b$ pro hoc caſu eſt quantitas negativa, erit ratio excluſionis $aa:a\text{-}b$ major quacunque ratione continentiæ, adeoque etiam ratio $x:1$ pro hoc caſu quacunque finita major.

Propoſitiones ad inventionem æquationum conducentes.

INventio æquationum in quæſtionibus præſertim geometricis pendet a notitia earum propoſitionum, ex quibus reſultant æquationes conſtitutivæ figurarum: Eaſdem propoſitiones Analyſis sic venatur. Primo concurrant in puncto C rectæ indefinitè extenſæ AB, DE, & centro C intervallo quovis deſcribatur circulus; ut in fig. 1., ponaturque ſemicircumferentia ADB = a, arcus DB = x. Erit a = DBE = BEA = EAD, & DA = a - x = BE, adeoque AE = x. Ergo cum quantitas angulorum ad punctum C menſuretur a quantitate arcuum interceptorum, anguli ad verticem oppoſiti ſunt æquales, ſi $x = a - x$, erit $x = a:2$ quo caſu omnes anguli menſurantur a quadrante circumferentiæ, & recti appellantur, linea verò lineæ perpendicularis dicitur. Sed ſi x major fuerit, vel minor $a - x$ linea lineæ obliqua dicitur, angulorum verò qui recto major obtuſus, qui recto minor acutus vocatur, & utriuſque ſumma $x + a - x = a$ ſemper æquatur duobus rectis. E converſo ſi tres rectæ AC, DC, BC ita concurrant in idem punctum C, ut AD + DB = a, erit AD + DB = BE + EA. Ergo AB diameter, & binæ AC, BC ſunt in directum. Secundo eſto in fig. 2. triangulum ABC, cujus baſis BC quacunque determinatè aſſignabili minor extendatur verſus D, E; concipiaturque ita inverti triangulum ABC ſimul cum extenſa utrinque baſi, ut lateri AC ſuperponatur latus ac, & triangulum ABC cadat in abc: Poſitis angulis ABC = Y = abc, BAC = x = bac, & ACB = z = acb, erit per præcedentem EAB = $a\text{-}x\text{-}z$ = Eab, & DBA = $a\text{-}y$ = dba. Quoniam autem rectæ BC, & bc ſunt minores qualibet quantitate determinatè aſſignabili, punctum a cadet in B, & b in A. Ergo BAC = x = bac = o, & ACB = z = acb = $a - y$; Sed ſubſtituendo hos

Co

hos valores in Æquatione e A B = *a-x-z* = E *ab* reſultat e A B = E *ab* = *a-o-a* + *y* = *y* = A B C = *abc*; ergo, ſi baſes inverſi trianguli fuerint minores quantitate determinatè aſſignabili, angulus e A B = A B C. Atiqui ex eo quod utrinque creſcant æqualiter baſes ex B verſus E, atque ex A verſus *d* nullo modo mutatur poſitio immotæ A B ad immotas D E, & *de*, ergo, qualiſcunque ſit baſis trianguli inverſi, erit angulus e A B = A B C = a b c. Sed per præcedentem e A B + B A d = a, ergo y + x + z = a, nempe cuiuſcunque trianguli tres anguli æquantur duobus rectis. Rurſus e A C = *y* + *z* = *c a b*, ergo externus angulus æquatur duobus internis oppoſitis in quolibet triangulo. Demum addendo hinc inde in infinitum triangula æqualium laterum, & angulorum cum A B C, ſituque inverſo conſtituta, baſes omnes ſuperiores, itemque omnes inferiores erunt in directum, eo quod x + y + z = a. Ergo conſtituent duas rectas nunquam concurrentes, quæ idcirco parallelæ appellantur, & quibus cum latus quodlibet trianguli angulos alternatim æquales facit; cumque hoc ſubſiſtat quæcunque ſit poſitio laterum A B, A C: propterea quælibet recta cum parallelis concurrens angulos alternatim æquales facit; nulla enim recta duci poteſt intra illas, quæ non poſſit eſſe latus trianguli intra parallelas datas conſtituti, & ſimul cum aliis ſitu inverſo ut dictũ eſt collocatis ſuperficiem intra parallelas poſitam replentis. Tertio infra triangulum A B C fig.3.collocentur tria illi in omnibus æqualia, ſituque inverſo conſtituta, infra hæc verò quinque alia eodem modo, atque ita in infinitum juxta ſeriem imparium numerorum. Quoniam ad ſingula puncta concurſuum ſumma angulorum eſt x+y+z= a conſtituetur poſt ſingulas additiones triangulum æquiangulum primo; horum autem triangulorum baſes ita erunt parallelæ, ut ſint lateribus proportionales; quippe ex axiomate ſecundo erit A B : B C = A D : D E = A F : F G, & sic in infinitum. Ergo etiam dato quolibet triangulo, ductaque in illo parallelâ ad baſim, vel datis duobus triangulis æquiangulis, licet duo illa conſiderare tanquam duas ſummas ex triangulis æquiangulis, atque æqualibus indefinite parvis ſituque inverſo poſitis conſtitutas, quorum proinde latera æqua-

les

les angulos continentia proportionalia ſunt. Quare ſi ponantur AF = a, GF = b, DA = x, DE = y ex demonſtratis in propoſitione 4. primæ partis erit $ay = bx$ æquatio trianguli conſtitutiva. Quarto ſi triangulum rectangulum fuerit, atque AD ex vertice anguli recti BAC perpendicularis ad baſim BC, ut in fig. 4. duo triangula partialia ADB, & ADC æquiangula erunt totali, quippe in ſingulis angulus, qui rectus eſt æquatur $a:2$, ergo ſi angulus ille, qui comunis eſt triangulo tam partiali, quam totali ponatur x, erit tertius angulus in triangulo tam partiali, quàm totali $a:2 - x$, eo quod in omni triangulo ſumma trium angulorum ſit a. Hinc per præcedentem propoſitionem latera circa æquales angulos ſunt proportionalia. Quare poſitis BC = a, CA = b, AB = c, CD = y, DB = z erit $a \cdot b = b \cdot y$, ſeu multiplicando extrema, & media $ay = bb$, & dividendo utrinque per a, $bb:a = y$, eademque de cauſa $cc:a = z$. Ergo $y + z = a = bb + cc : a$, & multiplicando utrinque per a reſultat $aa = bb +$, cc nempe in omni triangulo rectangulo quadratum lateris angulo recto oppoſiti æquale quadratis laterum angulum rectum continentium. Quinto ſi in circulo aſſumatur quodlibet circumferentiæ punctum D, ex quo ducatur DE perpendicularis ad diametrum AB, atque ex centro C radius CD, ut in fig. 5. ponendo AB = a, AE = x, & DE = y, erit EB = a - x, EC = a:2 - x, adeoque rectangulum AEB = ax - xx. Sed etiam ſi a quadrato baſis DC = $aa:4$ ſubtrahatur quadratum lateris EC = $aa:4 - ax + xx$ ex præcedenti propoſitione reſultat quadratum lateris DE = $ax - xx = yy$. Ergo habetur æquatio circuli conſtitutiva, per quam patet: $x:y = y:a - x$. Sexto vocando perpendicularem DE ſinum arcûs DA, vel anguli ad centrum DCA, atque adjacentis arcûs DB, vel anguli DCB, oſtenditur regula ſinuum, nempe: in omni triangulo rectilineo latera eſſe ut ſinus oppoſitorum angulorum. Etenim ſi in figuris 6. 7. 8. ſit AF ex vertice A trianguli ABC perpendicularis baſi BC indefinitè productæ, tum abſciſſis, æqualibus BD, & CG ſint DE, & GH perpendiculares eidem baſi, ponendo AB = a, AC = b, AF = c, BD = CG = r, DE = y, GH = z ob ſimilitudinem triangulorum BDE,

BAF

BAF erit $ay = cr$; Sed etiam ob ſimilitudinem triangulorum CGH, CAF erit $bz = cr$. Ergo $ay = bz$, ſeù $a:b = = z:y$. Hinc ad eas æquationes inveniendas, quæ de triangulis quæſtiones reſoluunt Analyſis ſinus anguiorum angulis datis, vel quæſitis ſubſtituit, ut expedite ſolutionem aſſequatur. Patet autem in fig. 7. ſinum GH uſurpari pro ſinu anguli obtuſi ACB adiacentis açuto ACF. At in fig. 8. quoniam ob angulum rectum ABC latus trianguli AB coincidit cum perpendiculari ad baſim AF, etiam ſinus DE coincidit cum radio DB = CG. Sed CG: GH = CA: AB ob ſimilitudinem triangulorum CGH, & CAB; ergo per ax. 1. quia CG = DE erit DE. GH = CA: AB

Digitized by Google

Digitized by Google